信息经济学

第六课：序贯博弈（二）

彭世喆

数字经济系
长沙理工大学经济与管理学院

1. 策梅洛定理
2. 序贯博弈中的纯策略
3. 市场准入游戏
4. 扔沙包游戏
5. 议价游戏
6. 复习

策梅洛定理

完美信息（Perfect information）

每个玩家都观察到了游戏历史，即玩家在决策时知道在哪一个节点以及是如何到达这个节点的。

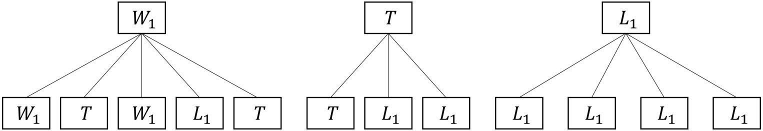
策梅洛定理（Zermelo's theorem）

在两人的有限（有限个节点）游戏中，如果双方皆拥有完美信息，则先行者或后行者当中必有一方有必胜/必不败（平局）的策略，无论对手怎么做。

- 三种结果：W_1，L_1 和 T
- 这个定理不是说这类博弈有三种结果，而是表明解的存在性，但并没有说明解是什么以及如何解
- 例子：Nim 游戏（当两堆火柴数量不相等时，无论玩家 2 做什么，玩家 1 稳赢）、井字棋（先行并占角）、象棋和围棋（难以画出完整的博弈树）

证明

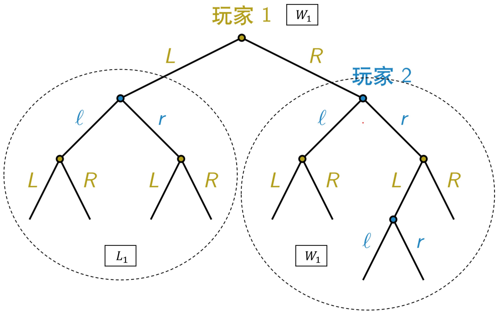
- 逆向归纳法（关于决策树的最大长度 N）
- 当 $N = 1$ 时，假设玩家 1 先行，穷举所有可能的情况。例如



- 假设定理对于所有长度 $\leq N$ 的博弈成立

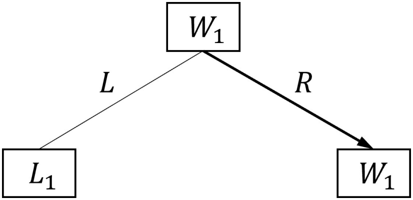
证明

- 关键步骤：需要证明定理对于所有长度 $= N+1$ 的博弈也成立。下图给出一个最大长度为 $N+1=4$ 的例子
- 虚线圈出的部分叫做子博弈（Subgame），即博弈中更小的博弈。左边的子博弈发生在玩家 1 选择 L 之后，长度为 2。右边的子博弈发生在玩家 1 选择 R 之后，长度为 3
- 由归纳假设可知，两个子博弈都有解，例如分别为 L_1 和 W_1



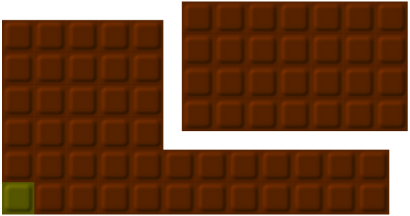
证明

- 原博弈可被简化为一个长度为 1 的博弈，并且有解，即玩家 1 会选择 R



例子：巧克力游戏（Chomp）

- 有一块 $n \times m$ 的巧克力，两人轮流选择一小块巧克力并拿走它右边和上边的所有巧克力
- 吃掉最左下角巧克力的玩家判输
- 根据策梅洛定理，这个游戏有解
- 除了 1×1 的巧克力，对于其他大小的巧克力，先行者必胜（首先排除平局，再用策略窃取假设先行者选择最右上角的巧克力，排除后行者必胜）

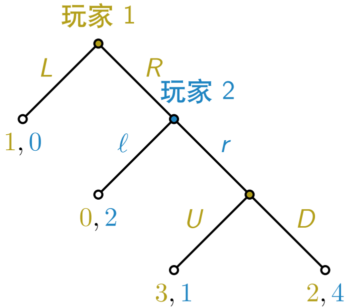


序贯博弈中的纯策略

序贯博弈中的纯策略（Pure strategy）

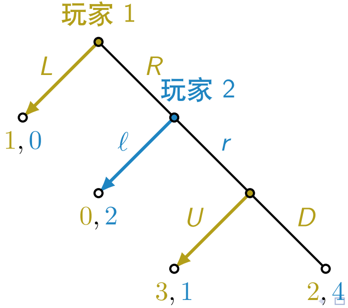
在拥有完美信息的序贯博弈中，玩家的纯策略是一个完整的行为计划，确定了在每一个决策节点上玩家应该选择什么行为。

- 例子：玩家 1 的策略集 $=\{(L,U),(L,D),(R,U),(R,D)\}$，玩家 2 的策略集 $=\{\ell, r\}$



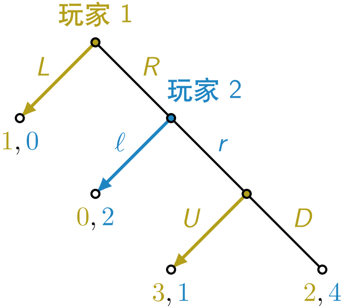
序贯博弈中的纯策略

- 玩家 1 不是只有三个纯策略，前两个纯策略是冗余的。玩家 2 可能不用做决策，但一个纯策略必须告诉玩家在每个决策节点采取什么行为，不管能不能到达这个节点
- 由逆向归纳法得到每一个节点的最优决策 (LU, ℓ)
- 逆向归纳法必须告诉玩家 1 在决策时应该怎么做，以及玩家 2 认为玩家 1 会怎么做（虽然 U 和 r 不会实现，但也是逆向归纳法的一部分）



序贯博弈中的纯策略

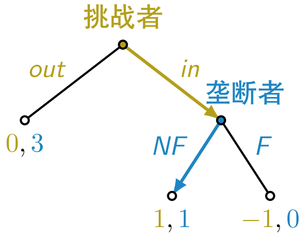
- 纳什均衡 $= ((LU, \ell), (LD, \ell))$
- 前两行可见冗余。在第二个纳什均衡中，玩家 1 选 D 是不理性的。但无所谓，因为反正到不了这一步
- 机械式寻找纳什均衡会发现不理性的行为，因为找到了永远不会发生的结果



		玩家 2	
		ℓ	r
玩家 1	LU	$\underline{1}, \underline{0}$	$1, \underline{0}$
	LD	$\underline{1}, \underline{0}$	$1, \underline{0}$
	RU	$0, \underline{2}$	$\underline{3}, 1$
	RD	$0, 2$	$2, \underline{4}$

市场准入游戏

- 有一家垄断公司，面对一个可能入侵市场的挑战者
- 纳什均衡 $= ((in, NF), (out, F))$
- 在第二个纳什均衡中，也是互为最优反应。假如垄断者威胁会反击，则挑战者会选择观望。但均衡成立需要让挑战者相信一个不可信的威胁（试试杀鸡儆猴）



		垄断者	
		F	NF
挑战者	in	$-1, 0$	$\underline{1}, \underline{1}$
	out	$\underline{0}, \underline{3}$	$0, \underline{3}$

拓展：多个垄断市场

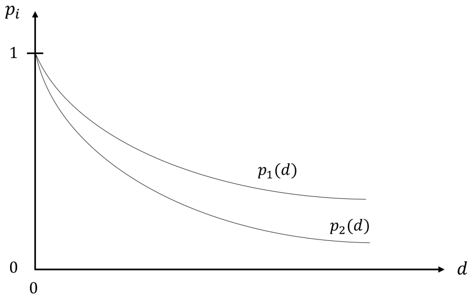
- 一个垄断者拥有多个垄断市场，挑战者序贯进入，并知道上一个挑战者和垄断者之间的博弈结果
- 选一列同学玩游戏（杀鸡儆猴有用）
- 逆向归纳法得出最后一个市场的挑战者会进入，因为垄断者没有继续威胁的动机。进而垄断者会让所有挑战者进入
- **理论不能解释现实**（Chain-store paradox）
    - 挑战者认为垄断者以 1% 的概率是激进者，当挑战者进入时会采取反击行为。那么垄断者可以通过在早期反击阻止挑战者进入（无论是真激进还是装成激进）
    - 第一个市场的挑战者会进入，因为觉得垄断者是激进者的概率很小
    - 一旦反击，虽然后续挑战者仍然分不清垄断者到底是不是激进者，但会更新是激进者的概率

分析

- 引入信息不确定性可以改变博弈结果
- 如何建立激进的形象（Reputation）？
- 形象很重要
  - 可以阻止潜在挑战者（例如不要仅仅因为有人质被挟持而向罪犯妥协）
  - 医生和会计的声誉很重要
  - 脾气差的人更容易得逞（可以装出来）

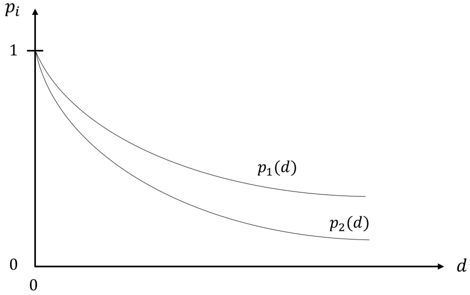
扔沙包游戏

- 有两位玩家相对而立，一人手上有一个沙包
- 两人轮流决策是将沙包扔过去还是向前走一步
- 沙包击中对方则赢，没中则输，对方不能躲闪
- 这是关于 when（而不是 what）的决策，太早或太迟都不行
- 记 $p_i(d)$ 为玩家 i 在距离 d 击中对方的概率（技术有高低）



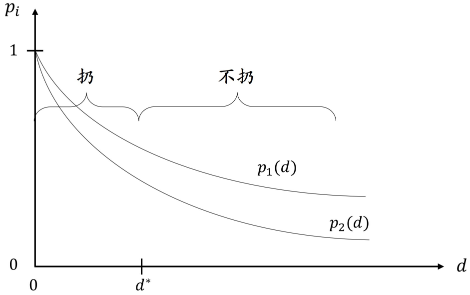
游戏分析

- 谁会先扔？(技术好的先扔还是技术差的**抢扔**)
- 事实 A：假设还没有人扔过，如果玩家 i 在距离 d 知道对手不会在距离 $d-1$ 扔，则玩家 i 不应该在距离 d 扔
- 事实 B：假设还没有人扔过，如果玩家 i 在距离 d 知道对手会在距离 $d-1$ 扔，则当 $p_i(d) \geq 1 - p_j(d-1)$ 时，玩家 i 应该在距离 d 扔



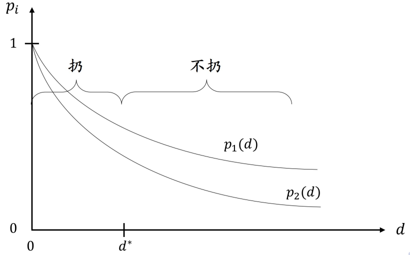
游戏分析

- 随着 d 变小，记 d^* 为 $p_i(d)+p_j(d-1)\geq 1$ 首次成立的距离
- 当距离大于 d^* 时，不扔严格占优于扔（无论对手下一轮扔不扔，不扔都比扔好），不用害怕对方过早扔沙包
- 但在距离 d^*，事实 A 和 B 出现了分歧，最优反应取决于关于对方下一阶段行为的预测



游戏分析

- 用逆向归纳法得到在距离 $d^* - 1$，对方将扔出沙包
  - 当 $d = 0$ 时，玩家 2 一定会扔，因为 $p_2(0) = 1$
  - 当 $d = 1$ 时，玩家 1 知道玩家 2 下阶段一定会扔，由事实 B 可得，玩家 1 会选择扔，因为 $p_1(1) + p_2(0) \geq 1$
  - ...
  - 当 $d = d^*$ 时，玩家 i 知道对方下阶段一定会扔，由事实 B 可得，玩家 i 会选择扔
- 在距离 d^*，当 $p_1(d^*) + p_2(d^* - 1) \geq 1$ 时，玩家 1 率先扔出沙包；当 $p_2(d^*) + p_1(d^* - 1) \geq 1$ 时，玩家 2 率先扔出沙包



启示

- 技术好的玩家并不一定先扔，而是看谁在距离 d^* 行动（d^* 同时取决于双方的能力）
- 即使对方不会玩这个游戏，也不要远于距离 d^* 扔
- 事实：人们通常过早扔出沙包，然后没中（过度自信、先下手为强）

经验 15

等待有时是个好选择，但不要因为保守而错过时机。

一阶段议价游戏

- 有两位玩家，玩家 1 向玩家 2 提出一个 1 元钱的分配方案 $(s, 1-s)$
- 如果玩家 2 接受，则按分配方案执行；如果玩家 2 拒绝，则双方都没钱 $(0,0)$
- 假设玩家 2 如果接不接受方案的效用相同，则会接受方案（可以给的不多也不少）
- 玩游戏
- 事实：有人会拒绝小额的分配方案（自尊、公平、强势形象）
- 理论：由逆向归纳法可得，玩家 1 会提出 $(1,0)$ 的方案

两阶段议价游戏

- 阶段一：玩家 1 向玩家 2 提出一个 1 元钱的分配方案 $(s_1, 1-s_1)$。如果玩家 2 接受，则按分配方案执行；如果玩家 2 拒绝，则进入下一个阶段，角色互换
- 阶段二：玩家 2 向玩家 1 提出一个 1 元钱的分配方案 $(s_2, 1-s_2)$。如果玩家 1 接受，则按分配方案执行；如果玩家 1 拒绝，则双方都没钱 $(0,0)$
- 折现（投资获利或可能死亡）：现在的 1 元钱比未来的 1 元钱更值钱。下阶段的 1 元钱在现阶段只值 δ 元（$\delta < 1$）
- 逆向归纳法
  - 玩家 2 需要思考如果在阶段一拒绝，在阶段二能够得到多少
  - 如果 $s_1 \geq \delta \times 1$，则玩家 2 会接受；如果 $s_1 < \delta \times 1$，则玩家 2 会拒绝

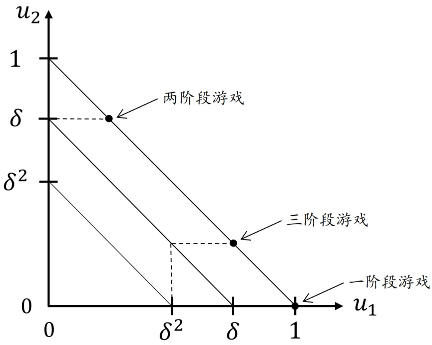
多阶段议价游戏

- 多阶段游戏的最后一个阶段就是一个一阶段游戏
- 在两阶段游戏中，如果一开始玩家 2 拒绝，则可在下阶段得到 1，但其现值只有 δ
- 在三阶段游戏中，如果一开始玩家 2 拒绝，则可在下阶段得到 $1-\delta$（玩家 2 变成了提议方，能获得两阶段游戏中提议方的份额），但其现值只有 $\delta(1-\delta)$

	提议方	接收方
一阶段	1	0
两阶段	$1-\delta$	δ
三阶段	$1-\delta(1-\delta)$	$\delta(1-\delta)$
四阶段	$1-\delta(1-\delta(1-\delta)) = 1-\delta+\delta^2-\delta^3$	$\delta(1-\delta(1-\delta)) = \delta-\delta^2+\delta^3$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
十阶段	$1-\delta+\delta^2-\delta^3+\cdots+\delta^8-\delta^9$	$\delta-\delta^2+\delta^3-\cdots-\delta^8+\delta^9$

多阶段议价游戏（都从现值角度看）

- 以三阶段游戏为例
  - 玩家 1 可以在阶段三得到现值 δ^2，那么在阶段二至少给玩家 1 现值 δ^2，他才会接受
  - 玩家 2 可以在阶段二得到现值 $\delta-\delta^2$，那么在阶段一至少给玩家 2 现值 $\delta-\delta^2$，他才会接受
  - 因此玩家 1 在阶段一提出的分配方案为 $(1-\delta+\delta^2, \delta-\delta^2)$



多阶段议价游戏

- 无穷阶段
  - $s_{10} = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \cdots + \delta^8 - \delta^9 = \frac{1-\delta^{10}}{1+\delta}$ 和 $1 - s_{10} = \frac{\delta+\delta^{10}}{1+\delta}$
  - $s_\infty = \frac{1}{1+\delta}$ 和 $1 - s_\infty = \frac{\delta}{1+\delta}$
  - 假如讨价还价快速进行，则 $\delta \approx 1$ 以及 $s_\infty = 1 - s_\infty = 1/2$
  - 均匀分配的条件：无穷阶段议价以及没有折现
  - 折现因子 δ 还体现了耐心程度，不耐心会处于劣势地位
- 由于第一个分配方案一定会被接受，因此不会发生议价过程（即议价发生在脑海中）
- 现实中为什么还有议价现象呢？（议价对象的价值或议价者的折现因子未知造成低效、拒绝显得有耐心和强势）

Thanks!